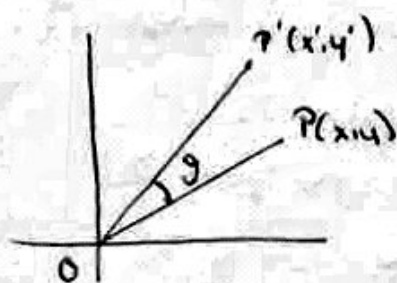


Στροφή: $\mathbb{R}^2, \theta$



$$\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\phi: P \rightarrow P' = \phi(P)$$

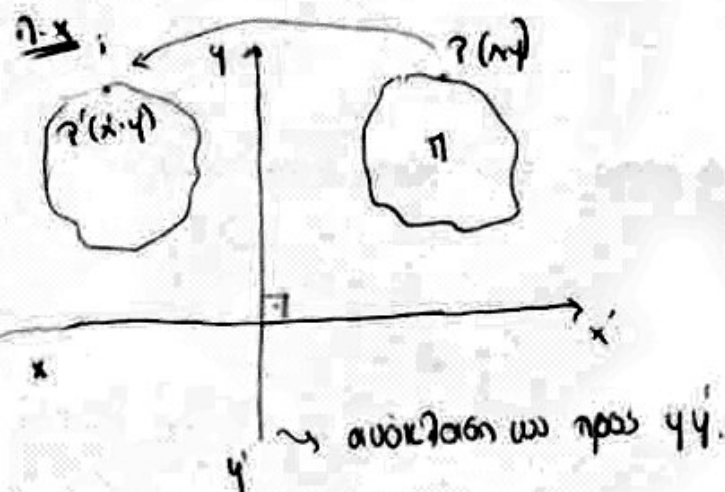
$$A_\phi = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$X' = A_\phi X \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ανστροφή - Κατορθογραφία

$$\text{αν } \phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow A_\phi = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

όπου $\theta/2$ είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ανστροφής με τον xx'



(βοήθη π για το $\theta/2$ (η γωνία με τον
ευθεία ανστροφής με τον xx') είναι $\theta/2$)
όπου το θ είναι π

Ο πίνακας ανστροφής

$$A_\phi = \begin{pmatrix} \cos \pi & \sin \pi \\ \sin \pi & -\cos \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x' = -x \\ y' = y \end{matrix}$$

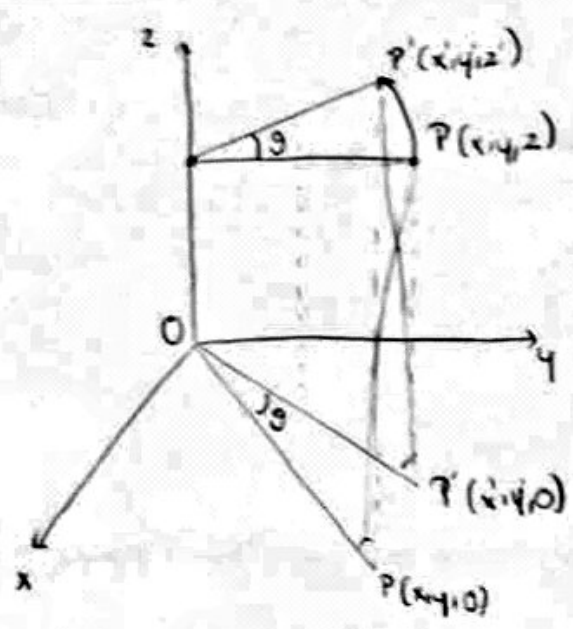
Εφαρμογή στον $\mathbb{R}^3$

$$\phi: \text{γραμμικός μετασχηματισμός αν: } \begin{cases} x' = a_{11}x + b_{12}y + c_{13}z \\ y' = a_{21}x + b_{22}y + c_{23}z \\ z' = a_{31}x + b_{32}y + c_{33}z \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_\phi, \text{ όπου } X' = A_\phi X$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A_\phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Στροφή στο $\mathbb{R}^3$



• Μετασχηματισμός που διατηρεί μήκη & γωνίες ονόματι
 βασικό ορθόγ. μετασχηματισμό
 Σαδρονόμος με έναν άξονα στροφής (z)
 (ευθεία - ίδιος ο άξονας OZ)
 και γινεται στροφή με γωνία θ.

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \\ z' = z \end{cases}$$

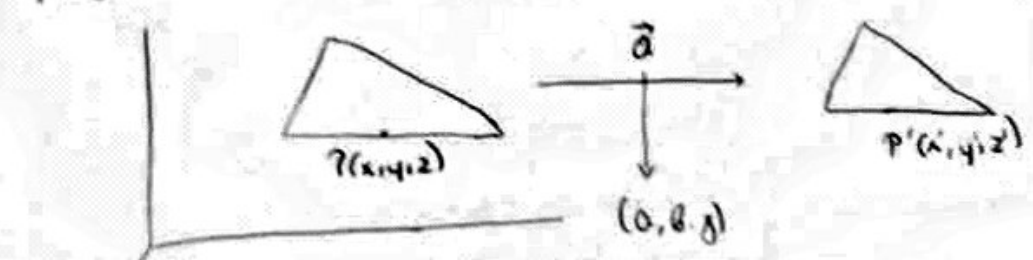
$$A_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(*) Η παραπάνω μεταστροφή καλείται μή-μήδευση
 Στοιχεία του διατηρεί μήκη & γωνίες

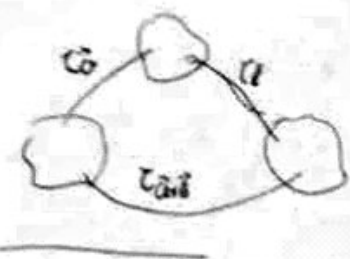
(*) Η στροφή γύρω από τον άξονα z είναι μετασχηματισμός ο οποίος έχει μια ένα άξονα
 άκσης

Παράλληλη μεταστροφή (κατά Στοιχεία α) (z)

Έκαστο ορθογώνιο άξονα άξονα Oxyz.



$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + g \end{cases}$$



(*) Συνδυασμός παραπάνω μεταστροφών
 C0, C1 είναι παραπάνω μεταστροφή
 C2, C3.

ISOMETRIA

Ορισμός: Ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ λέγεται ισομετρία αν διατηρεί τις αποστάσεις σημείων.
 Δηλαδή αν $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow d(\vec{p}, \vec{q}) = d(\phi(\vec{p}), \phi(\vec{q}))$

Π.χ 1 αν $\mathbb{R}^3: \vec{p} = (x_1, y_1, z_1), \vec{q} = (x_2, y_2, z_2)$
 $d(\vec{p}, \vec{q}) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Π.χ 1 Έστω $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$x \mapsto x+2, \phi(x) = x+2.$$

Έστω $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow d(x, y) = |x - y|$

$$d(\phi(x), \phi(y)) = |\phi(x) - \phi(y)| = |(x+2) - (y+2)| = |x - y| = d(x, y) \Rightarrow \phi \text{ ισομετρία.}$$

② Έστω $T_a: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Υπάρχει η T_a είναι ισομετρία.

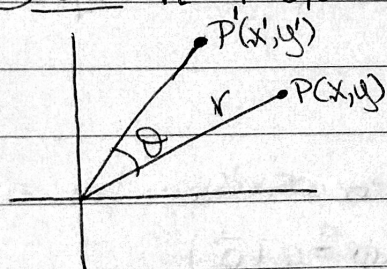
$$\text{Έστω } P(x_1, y_1) \xrightarrow{T_a} (x_1 + a, y_1 + b) = P'$$

$$\vec{a} = (a, b) \quad Q(x_2, y_2) \xrightarrow{T_a} (x_2 + a, y_2 + b) = Q'$$

Η T_a είναι ισομετρία $\Leftrightarrow d(P, Q) = d(T_a(P), T_a(Q)) = d(P', Q')$

$$d(P', Q') = \sqrt{((x_2 + a) - (x_1 + a))^2 + ((y_2 + b) - (y_1 + b))^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = d(P, Q)$$

③ Έστω η $R_{\theta} \stackrel{=}{=} \phi$ είναι ισομετρία (στο $\mathbb{R}^2$)



$$\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x', y')$$

$$A\phi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

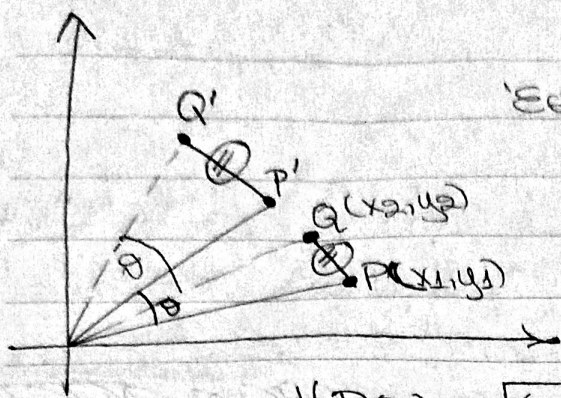
$$X' = A \cdot X$$

$$(x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta, x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta)$$

$$\text{Παρατηρείς } |\vec{OP}| = |\vec{OP}'|$$

$$|\vec{OP}| = d(0, P) = \sqrt{x^2 + y^2} = |\vec{OP}'| = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}$$





Εστω $P, Q \xrightarrow{R_{\theta}}$ P', Q' αντίστοιχα

πρέπει να $d(P, Q) = d(P', Q')$
 $(d(\phi(P), \phi(Q)))$

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$P'(x_1 \cdot \cos \theta - y_1 \cdot \sin \theta, x_1 \cdot \sin \theta + y_1 \cdot \cos \theta), Q'(x_2 \cdot \cos \theta - y_2 \cdot \sin \theta, x_2 \cdot \sin \theta + y_2 \cdot \cos \theta)$$

Συγκρίνουμε τα 2 τρίγωνα $(\triangle OPQ, \triangle OP'Q')$ $|\vec{OP}| = |\vec{OP'}|$

Αυτά έχουν $|\vec{OP}| = |\vec{OP'}|$ (από τον ορισμό)

$$|\vec{OQ}| = |\vec{OQ'}|$$

$$d(P, Q) = d(P', Q')$$

$$\text{και } \angle POQ = \theta = \angle P'OQ'$$

R_{θ} Ισομετρία

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αν μια Ισομετρία ϕ είναι επιπλέον γραμμική.

$$\begin{cases} \phi(\vec{x} + \vec{y}) = \phi(\vec{x}) + \phi(\vec{y}) \\ \phi(k\vec{x}) = k\phi(\vec{x}), k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ αυτή καλείται γραμμική Ισομετρία (ή ορθώνιος μετασχηματισμός).

(ταυτόχρονης Ισομετρίας)

Θεώρημα: Εστω $(V, \langle, \rangle), (W, \langle, \rangle)$ δυο πραγματικοί χώροι εφοδιασμένοι με τα αντίστοιχα εσωτερικά γινόμενα.

Τότε:

(α) Κάθε Ισομετρία ϕ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα ενός ορθώνιου μετασχηματισμού και μιας σταθεράς $(\phi = g + \vec{a})$

(β) Αν μια Ισομετρία ϕ διαφέρει από μια γραμμική απεικόνιση g , μια σταθερά $\vec{a} \Rightarrow$ η g είναι ορθώνιος μετασχηματισμός

Παράδειγμα: $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \mapsto \phi(x, y, z) = (x', y', z')$$

Αν ϕ ισομετρία: $\phi = \underbrace{\text{στροφή}} + \underbrace{\vec{a}}_{\text{μεταφορά}}$

Έστω $A\phi$ ο πίνακας της ϕ .

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A\phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Κάθε ισομετρία = στροφή + μεταφορά

* Η έννοια της ισομετρίας $\hat{=}$ ανάνταση + μεταφορά

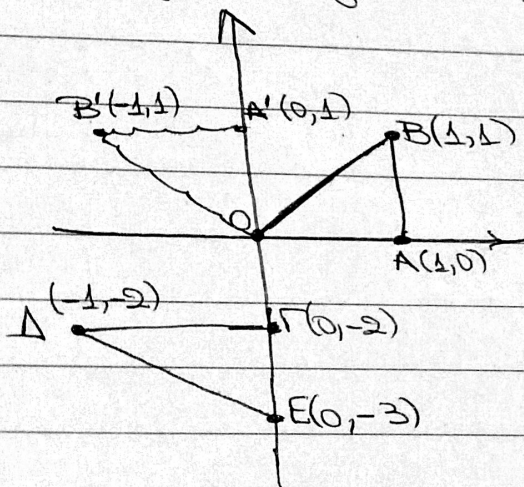
Γνωρίζεται αμέσως με την έννοια "ισότητα σχημάτων"

Αν A, B δυο σχήματα ($\forall x \in \mathbb{R}$)

$$\Rightarrow A=B$$

$$\Leftrightarrow \exists \phi \text{ ισομετρία } : \phi(A)=B$$

Εφαρμογή: Να ελεγχθεί με χρήση ισομετριών αν $\hat{OAB} = \hat{\Delta GE}$.



$$\hat{OAB} = \hat{\Delta GE} \Leftrightarrow \exists \phi \text{ ισομετρία } \phi(\hat{OAB}) = \hat{\Delta GE}$$

$$X' = AX + \vec{a}$$

Γνωρίζοντας ότι ισομετρία = στροφή + μεταφορά ή ανάνταση + μεταφορά (*βλέπε διαγράμματα το χράφουμε!).

$\Rightarrow$ αναζητούμε κατάλληλους (αντίστοιχους) μετασχηματισμούς.
Στο τρίγωνο $\hat{OAB}$ κάνουμε στροφή κατά $\hat{\phi} = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \pi/2 & -\sin \pi/2 \\ \sin \pi/2 & \cos \pi/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\text{Άρα } (0,0) \xrightarrow{\phi} (0,0) + (0,-3) = (0,-3) = E$$

$$(1,0) \xrightarrow{\phi} (0,1) + (0,-3) = (0,-2) = \Gamma$$

$$(1,1) \xrightarrow{\phi} (-1,1) + (0,-3) = (-1,-2) = \Delta$$

Στο $O'\hat{A}'B'$ κάνω μεταφορά τ κατά διάνυσμα $\vec{a} = (0, -3)$.

Άρα το $O\hat{A}B$ μέσω $R_{0, \pi/2}$ και $\tau(0, -3) \mapsto E\hat{\Gamma}\Delta$

$$\begin{cases} x'' = x \cdot \cos \frac{\pi}{2} - y \cdot \sin \frac{\pi}{2} + 0 \\ y'' = x \cdot \sin \frac{\pi}{2} + y \cdot \cos \frac{\pi}{2} + (-3) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{a}$$

Από θεωρήμα η ϕ είναι ισομετρία $\Rightarrow$ τα τρίγωνα είναι ίσα.

Γενικά τριγων: Το O μέσω στροφής & μεταφοράς πηξε στο E .

Το A	-11-	-11-	-11-	-11-	στο Γ .
Το B	-11-	-11-	-11-	-11-	στο Δ .